

Ad-Soyad :

Numara :

Cevap Anahtarı

**MAT 103 Lineer Cebir I Bütünleme Sınavı Soruları**

**05.02.2021**

**Not: Sorular eşit puanlı ve süre 90 dakikadır. Çözümlerinizi ayrıntılı olarak yazınız. Mümkünse cevaplarınızı PDF dosyasına dönüştürerek gönderiniz. Öğrenmediğimiz yöntemlerle yapılan çözümler kabul edilmeyecektir. Başarılar dilerim.**

1) Aşağıdaki soruları yanında bulunan parantez içine doğru ise “D”, yanlış ise “Y” yazarak cevaplayınız.

(Y) Her halka kendi üzerinde bir vektör uzayıdır.

(D) Bir grubun keyfi iki alt grubunun kesişimi de bir alt gruptur.

(Y) Bir vektör uzayının keyfi iki alt vektör uzayının birleşimi de bir alt vektör uzayıdır.

(D) Bir vektör uzayının her bazında aynı sayıda vektör vardır.

(D) Her cisim aynı zamanda bir halkadır.

2)  $U = \{(1, 2, 1), (2, 4, 2), (0, 0, 0)\} \subset \mathbb{R}^3$  alt kümesi veriliyor.

a) U için bir baz bulunuz.  $\{(1, 2, 1)\}$

b)  $\text{boy}U=?$   $\text{boy}U=1$

3)  $\langle , \rangle_1$  ve  $\langle , \rangle_2$  bir V vektör uzayı üzerinde tanımlı iç çarpım fonksiyonları olsun.

$\forall x, y \in V$  için  $\langle x, y \rangle = \langle x, y \rangle_1 - \langle x, y \rangle_2$  şeklinde tanımlanan  $\langle , \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$

fonksiyonunun bir iç çarpım fonksiyonu olup olmadığını araştırınız.

4)  $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $L(x, y, z) = (x^2 + y, x - 2y + z)$  fonksiyonunun bir lineer dönüşüm olup olmadığını araştırınız.

5) V bir reel vektör uzayı, U ise V nin alt vektör uzayı olsun.  $\forall x \in V$  için  $x + U = \{x + y : y \in U\}$  şeklinde tanımlanan  $x + U$  kümesinin V nin alt vektör uzayı olması için gerek yeter şart  $x \in U$  olmasıdır, gösteriniz.

3)  $\langle x, x \rangle = 0$  olduğunu kabul edelim.  $x = 0_v$  mi?

$$\langle x, x \rangle = 0 \Rightarrow \langle x, x \rangle_1 - \langle x, x \rangle_2 = 0 \Rightarrow \langle x, x \rangle_1 = \langle x, x \rangle_2$$

Bu ise  $x = 0_v$  olmasını gerektirmez. 0 halde, pozitif tanımlılık sağlanmayacağından verilen fonksiyon bir iç çarpım değildir.

4)  $\forall x = (x_1, y_1, z_1), y = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3, \forall c \in \mathbb{R}$  için

$$L(x+y) = L(x) + L(y), L(cx) = cL(x) \text{ mi?}$$

$$L(cx) = L(cx_1, cy_1, cz_1) = (c^2x_1^2 + cy_1, cx_1 - 2cy_1, cz_1)$$

$$cL(x) = c(L(x_1 + y_1, x_1 - 2y_1, z_1)) = (cx_1 + cy_1, cx_1 - 2cy_1, cz_1)$$

$L(cx) = cL(x)$  olmayabilir. Örneğin  $c=2, x=(1,1,1)$  için

$$L(2(1,1,1)) = (6,0) \neq (4,0) = 2L(1,1,1)$$

olup  $L$  lineer dönüşüm değildir.

5)  $\forall x \in U$  alalım.

( $\Rightarrow$ )  $x+U$  alt vektör üyesi olsun. Bu durumda  $0_v \in x+U$  olduğundan

$0_v = x+y$  olacak şekilde  $y \in U$  vardır.

$$x+y=0_v \Rightarrow y=-x \in U$$

$U$  alt vektör üyesi olduğundan  $-x \in U$  ise  $x \in U$  olur.

( $\Leftarrow$ )  $x \in U$  olsun.  $\forall y \in U$  için  $x+y \in U$  olduğundan  $x+U=U$  olur.

$U$  alt vektör üyesi olup  $x+U$  da alt vektör üyesi olur.